ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

МАТЕМАТИКА

4-й класс

1. Вычислите наиболее простым способом: $217 \cdot 2017 - 117 \cdot 2017$.

Ответ: 201 700.

Решение: 2017·(217–117)=2017·100=201 700.

2. Сумма всех цифр 2017 года равна 10. Сколько следующих лет в третьем тысячелетии обладают тем же свойством?

(Третье тысячелетие – промежуток времени с 1 января 2001 года по 31 декабря 3000 года по григорианскому календарю.)

Ответ: 43 года.

Решение:

2026, 2035, 2044, 2053, 2062, 2071, 2080 – 7 лет.
2107; 2116; …2170 – 8 лет
2206; 2215;…2260 – 7 лет
2305; 2314; …2350 – 6 лет
2404; 2413; …2440 – 5 лет
2503; 2512; …2530 – 4 года
2602; 2611; 2620 – 3 года
2701; 2710 – 2 года
2800 – 1 год

3. *Задача С. А. Рачинского*. В школе равное число девочек и мальчиков. Я принес 234 ореха, и каждому мальчику досталось по 5 орехов, каждой девочке – по 4 ореха. Но девочки обиделись, и в другой раз я принес столько орехов, что всем досталось по 6. Сколько орехов я принес?

Ответ: 312.

Решение:

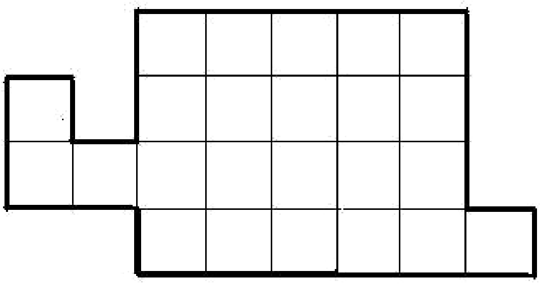
1. $5+4=9$ (орехов) получили вместе один мальчик и одна девочка вместе.
2. $234:9=26$ (человек) количество мальчиков и девочек в отдельности.
3. $6 \cdot 26 = 312$ (орехов) принес в другой раз.

4. Как, имея лишь два сосуда емкостью 5 и 7 л, налить из крана 6 л воды?

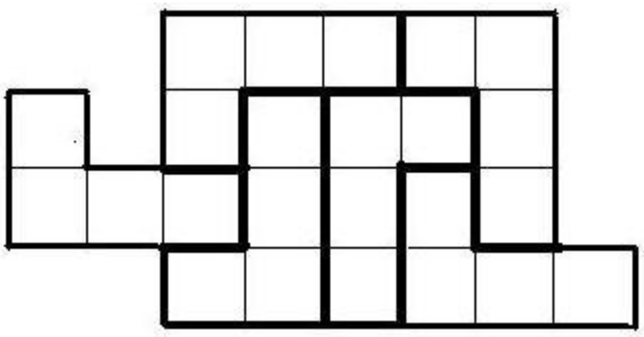
Решение:

5 л	0	0	5	0	2	2	5	0	4	4	5
7 л	0	7	2	2	0	7	4	4	0	7	6

5. Разрежьте фигуру на 6 равных частей по линиям клетчатой бумаги.



Решение:



Пояснение к проверке:
Верный способ разрезания – 3 балла, во всех остальных случаях – 0 баллов.

Максимальная оценка каждого задания – 3 балла.
3 балла – обоснованное верное решение,
2 балла – решение содержит незначительные ошибки или недостаточно обосновано,
1 балл – правильный ответ при отсутствии обоснования,
0 баллов – обоснование и ответ неверные или отсутствуют.
Наибольшая сумма баллов за всю работу – 15.

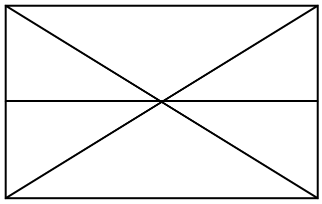
5-й класс

1. Вычислите наиболее простым способом: $123456789 \cdot 2017 - 123456788 \cdot 2017$.
Ответ: $2017 \cdot (123456789 - 123456788) = 2017 \cdot 1 = 2017$.

2. Для того чтобы разрезать металлическую балку на две части, нужно уплатить за работу 200 рублей. На сколько частей разрезали брус, если за всю работу заплатили 1200 рублей?
Ответ: 7.

3. В соревновании участвуют 4 футбольные команды. Каждая команда встречается с каждой другой. За победу начисляется 3 очка, за ничью – 1 очко, за проигрыш – 0 очков. Команды набрали 7, 5, 2, 1 очко. Сколько было ничьих?
Ответ: 3.

4. Определите, сколько треугольников изображено на рисунке. Свое решение обоснуйте.



Ответ: 12.

5. За какое наименьшее количество взвешиваний на весах без гирь можно найти самый тяжелый и самый легкий из четырех имеющихся камней?
Решение. За четыре взвешивания определим самый легкий и самый тяжелый. Для этого взвешиваем 1 и 2-й, 3 и 4-й камни. Затем сравниваем массы двух более легких и двух более тяжелых пакетов.

Максимальная оценка каждого задания для 5, 6 и 7-х классов – 3 балла.

3 балла – обоснованное верное решение,
2 балла – решение содержит незначительные ошибки или недостаточно обосновано,
1 балл – правильный ответ при отсутствии обоснования,
0 баллов – обоснование и ответ неверный или отсутствует.
Наибольшая сумма баллов за всю работу – 15.

6-й класс

1. Вычислите наиболее простым способом: $2018\frac{15}{19}\cdot 2017 - 2016\frac{15}{19}\cdot 2017$.

Ответ. $2017\cdot\left(2018\frac{15}{19} - 2016\frac{15}{19}\right) = 2017\cdot 2 = 4034$.

2. Вместо звездочек расставьте пропущенные цифры:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} 2\ 3\ 6 \\ *\ * \end{array} \\ \hline +\begin{array}{r} *\ *\ * \\ *\ *\ *\ *\ \ \end{array} \\ \hline *\ 2\ *\ 4\ 4 \end{array}$$

Свое решение обоснуйте.
Ответ: 236·54=12 744.

3. На дискотеке 75 % времени выключен свет, 95 % времени играла музыка и 40 % времени шел дождь. Какую наименьшую долю времени все это обязано было происходить одновременно?

Решение. Перейдем к дополнительным событиям: свет был включен 25 % времени, музыка молчала 5 %, а дождь не шел 60 % времени, так что дополнительные события не могли занять более 25 + 5 + 60 = 90 % времени. Следовательно, музыка под дождем в темноте звучала на меньше 100 – 90 = 10 % времени.

4. Парк окружен прямоугольной оградой со смежными сторонами 750 и 480 *м*. Снаружи парка, на удалении двух метров от ограды, пролегает тропинка. Тренируясь, каждое утро спортсмен пробегает по тропинке вокруг парка два раза. Какое расстояние пробегает при этом спортсмен?

Ответ: 4952 м.

5. Как за 5 взвешиваний расположить четыре пакета разной массы с помощью чашечных весов без гирь в порядке возрастания массы?

Решение. За четыре взвешивания определим самый легкий и самый тяжелый. Для этого взвешиваем 1 и 2-й, 3 и 4-й пакеты. Затем сравниваем массы двух более легких и двух более тяжелых пакетов. Затем, пятым взвешиванием сравниваем два средних пакета.

7-й класс

1. Сумма уменьшаемого, вычитаемого и разности равна 1452. Найдите уменьшаемое, вычитаемое и разность, если разность меньше вычитаемого на 456.

Ответ: 726, 591, 135.

2. Вдоль забора растут 12 кустов малины. Число ягод на соседних кустах отличается на 1. Может ли на всех кустах вместе быть 347 ягод?

Ответ: не может. Число ягод на соседних кустах отличается на 1, поэтому на двух соседних кустах вместе нечетное число ягод. Тогда количество на двенадцати кустах равно сумме шести нечетных чисел, т. е. числу четному. Значит, на всех кустах вместе не может быть 347 ягод.

3. Какой угол образуют стрелки часов в 13 часов 20 минут?

Ответ: 80°.

Найдите корни уравнения $|2x-2017|=2016$.

Ответ: 2016,5; 0,5.

4. Двое играют в следующую игру. Имеется три кучки камней: в первой – 10, во второй – 15, в третьей – 20. За ход разрешается разбить любую кучку на две меньшие; проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

Решение. После каждого хода количество кучек увеличивается на 1. Сначала их было 3, в конце – 45. Таким образом, всего будет сделано 42 хода. Последний, 42-й, ход сделает второй игрок.

8-Й КЛАСС

1. Докажите, что число $3^{10}-3^8+3^6-3^4+3^2-1$ делится на восемь.

2. Решите уравнение $|x-2017|+|2017-x|=2018$.

Ответ: 1008, 3026.

3. Цена билета для входа на стадион была 240 рублей. После снижения входной платы число зрителей увеличилось на 50 %, а выручка выросла на 25 %. Сколько стоил билет после снижения входной платы?

Ответ: 200 рублей.

4. Один из внешних углов равнобедренного треугольника равен 42°. Найдите угол между основанием этого треугольника и высотой треугольника, проведенной из вершины угла при основании.

Ответ: 69°. В случае неправильного чертежа (высота внутри треугольника) – оценка решения снижается на 1 балл.

5. Двое по очереди ставят ладей на шахматную доску так, чтобы ладьи не били друг друга. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

Решение. После каждого хода и количество вертикалей, и количество горизонталей, на которые можно поставит ладей, уменьшается на 1, поэтому игра будет продолжаться ровно 8 ходов. Поэтому, выигрышный ход будет сделан вторым.

9-Й КЛАСС

1. Докажите, что произведение трех последовательных чисел, сложенных со вторым из них, равно кубу этого числа.

Доказательство. Пусть второе число равно *n*, а два других числа равны соответственно $n-1$и $n+1$соответственно. Тогда $(n-1)\cdot n\cdot(n+1)+n=n^3-n+n=n^3$.

2. Решите уравнение $x^2 + 2016x - 2017 = 0$.
Ответ: 1; -2017.

3. Постройте график функции $y = \dfrac{3x^2 - |x|}{x + |x|}$.

Ответ: при $x > 0, y = \dfrac{3x-1}{2}$.

4. Скорость катера при движении по реке против течения составляет $\frac{9}{11}$ от скорости катера по течению. На сколько процентов скорость течения меньше скорости катера в стоячей воде?
Ответ: 90 %.

5. Внутри треугольника ABC на медиане BK отметили точку M так, что $AM = BC$ и $\angle CBM = 30°$. Найдите величину угла AMB.
Ответ: 150°.

10-й класс

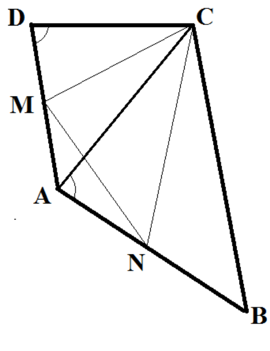
1. Решите неравенство $\dfrac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 2x - 15} \geq 0$.
Ответ: $(-\infty; -3) \cup [2; 5) \cup (5; \infty)$.

2. Решите уравнение $x^2 + 2016|x| - 2017 = 0$.
Ответ: -1; 1.

3. На первом курсе 80 % студентов сдали экзамен по математике, 85 % – по физике, 90 % – по химии и 98 % – по истории. Какая часть всех студентов первого курса могла успешно сдать все 4 экзамена?
Ответ: от 53 до 80 %.

4. Квадрат 5×5 заполнен числами так, что произведение чисел в каждой строке отрицательно. Доказать, что найдется столбец, в котором произведение чисел тоже отрицательно.
Доказательство. Произведение P всех чисел таблицы равно произведению произведений чисел в каждой строке. Так как в таблице пять строк, то P отрицательно. С другой стороны, P равно произведению произведений чисел в каждом столбце. Значит, найдется столбец, в котором произведение чисел отрицательно.

5. В выпуклом четырехугольнике ABCD AD = DC, AC = AB и ∠ADC = ∠CAB. Точки M и N – середины сторон AD и AB соответственно. Докажите, что треугольник MNC равнобедренный.
Решение. Заметим, что треугольники *BAC* и *ADC* подобны (оба равнобедренные и имеют равные углы при вершине). Поэтому ∠*NCB* = ∠*MCA* и *MC*/*AC*=*NC*/*BC* как соответственные элементы. Далее, ∠*MCN* = ∠*ACB*+∠*NCB*–∠*MCA* = ∠*ACB*. Получается, что треугольники *ACB* и *MNC* подобны по углу и двум сторонам. Откуда *MN* = *MC*.



11-Й КЛАСС

1. Постройте график функции $y = \dfrac{\sin 2x}{4\cos x}$.

Ответ: при $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, y = \dfrac{1}{2}\sin x$.

2. Дядька Черномор каждый вечер из 33 богатырей назначает на дежурство 9 или 10 по своему усмотрению. Через какое наименьшее число дней может оказаться, что каждый из богатырей выходил на дежурство одинаковое число раз?

Ответ: 7 дней. Пусть *n* и *p* – число дней, когда дежурило 9 и 10 богатырей, причем каждый из них дежурил *m* раз. Тогда 9n + 10p = 33m. При m = 1 нет решений, при m = 2 получим n = 4, p = 3.

3. Определите *a* так, чтобы сумма квадратов корней уравнения $x^2 + (2-a)x - a - 3 = 0$ была наименьшей.

Ответ: a = 1. *Решение.* Найдем сумму квадратов корней уравнения:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (2-a)^2 + 2(a+3) = a^2 - 2a + 10 = (a-1)^2 + 9$$

Значение данного выражения будет наименьшим при *a* = 1. При этом значении *a* дискриминант левой части уравнения положителен, поэтому корни существуют.

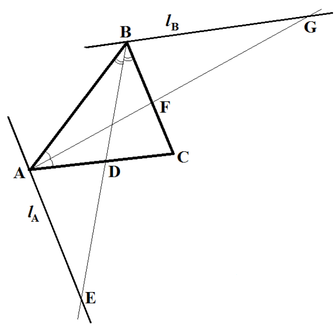
4. Дорога из села в город идет сначала 12 км в гору, потом 6 км с горы. Велосипедист едет без остановок в гору с одной постоянной скоростью, с горы – с другой. В один конец он ехал 2 ч, обратно 1,75 ч. Найдите скорость велосипедиста в гору и с горы.

Ответ: 12 *км/ч* и 8 *км/ч.*

5. Через вершину A неравнобедренного остроугольного треугольника ABC проведена прямая l_A, параллельная стороне BC, а через вершину B – прямая l_B, параллельная стороне AC. Биссектриса угла ABC пересекает сторону AC в точке D, а прямую l_A – в точке E. Биссектриса угла BAC пересекает сторону BC в точке F, а прямую l_B – в точке G. Оказалось, что DE = FG. Найдите угол C.

Ответ: 60°.

Решение. Так как треугольники FBG и FCB подобны (из параллельности l_B и AC), то FG/FA = FB/FC = AB/AC последнее равенство следует из свойства биссектрисы, аналогично DE/DB = DA/DC = AB/BC. Откуда получаем, что FG = FA·AB/AC, DE = BD·AB/BC, из равенства отрезков DE и FG следует, что FA/AC = BD/BC. Проведем высоты треугольника AH и BK, AH/BK = AC/BC = FA/BD, треугольники AHF и DKB прямоугольные и у них одинаковые отношения катета и гипотенузы, а значит, они подобны. Тогда ∠AHF = ∠BDK. В зависимости от расположения пар точек D, K и H, F получаем, что углы ADB и AFB либо равны, либо дополняют друг друга до 180°. В первом случае треугольник равнобедренный, а во втором случае легко вычислить, что угол C равен 60°.



Максимальная оценка каждого задания для 8, 9, 10 и 11-х классов – 5 баллов.

5 баллов – обоснованное верное решение, **4 балла** – решение содержит незначительные ошибки, в том числе вычислительные или недостаточно обосновано, **3 балла** – верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, **2 балла** – доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, **1 балл** – правильный ответ при отсутствии обоснования, или рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении), **0 баллов** – обоснование и ответ неверный или отсутствует. **Всего – 25 баллов.**